*/ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} - e^{x} + 1$

$= 0 - 0 + 1 = 1$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - e^{x} + 1$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}\left(e^{x} - 1 + \dfrac{1}{e^{x}}\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1 \Leftrightarrow y = 1$ est une asymptote à Cg

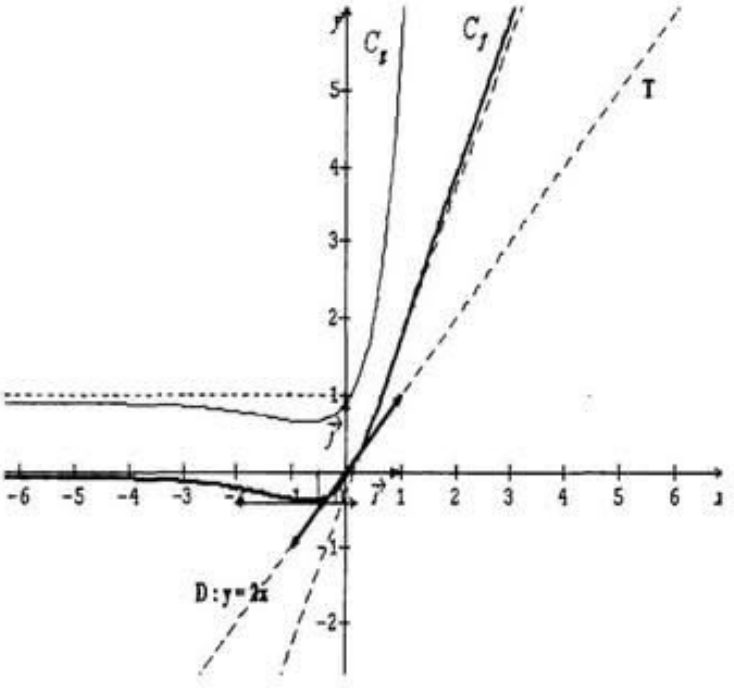
On a :

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{x} - \dfrac{e^{x}}{x} + \dfrac{1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}\left(\dfrac{e^{x}}{x} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{xe^{x}}\right) = +\infty$

Donc C_g admet une B.I.P de direction $(o, \vec{j})$.



c) $k \in \mathbb{R}_+^*$

$(E): e^{2x} - e^{x} + 1 - k = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} - e^{x} + 1 = k$

Donc l'équation (E) est équivalente à

$g(x) = k$

- Si $k \in \left]0, \dfrac{3}{4}\right[$:

  L'équation n'a pas des solutions.

- Si $k \in \left[1, +\infty\right[\cap \left\{\dfrac{3}{4}\right\}$:

  L'équation admet une seule solution

- Si $k \in \left]\dfrac{3}{4}, 1\right[$:

  l'équation admet deux solutions.

<u>Remarque :</u> les solutions de $g(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de C_g et $\Delta : y = k$.

2) $f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right), x \in \mathbb{R}$

a)

$f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right)$

$= \ln\left[e^{2x}\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)\right]$

$= \ln e^{2x} + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)$

$f(x) = 2x + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1 + e^{-x} + e^{-2x}\right)$

$= \ln(1) = 0$.

Donc : $D: y = 2x$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

c) $f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right) = \ln\left(g(x)\right)$

$\Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$

Puisque $g(x) > \dfrac{3}{4}$ (voir variation de g)

Alors $g(x) > 0$ d'où le signe de $f'(x)$ est celui de $g'(x)$

Donc f et g ont même sens de variation

D'où :